Формулы сокращённого умножения. Вывод формул

Некоторые произведения встречаются в алгебре настолько часто, что раскрывать в них скобки каждый раз заново невыгодно. Удобнее один раз аккуратно получить результат и дальше пользоваться готовым ответом. Так появляются **формулы сокращённого умножения**.

Важно: буквы a и b в формулах обозначают *любые* числа или выражения: 5, $3x$, $-2y^2$, $x+1$ и т. д. Мы ничего не предполагаем о них — поэтому формулы верны всегда.

1. Разность квадратов

Перемножим сумму и разность двух выражений:

$$(a-b)(a+b) = a^2 + ab - ba - b^2 = a^2 - b^2.$$

Слагаемые ab и $-ba$ взаимно уничтожились, потому что $ab = ba$. Остались только квадраты.

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

Произведение разности двух выражений на их сумму равно разности их квадратов.

Если прочитать формулу справа налево, получится разложение разности квадратов на множители: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Проверка на числах: $21 \cdot 19 = (20+1)(20-1) = 20^2 - 1^2 = 399$.

2. Квадрат суммы

Квадрат — это произведение выражения на себя:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Теперь слагаемые ab и ba не уничтожаются взаимно, а складываются: $ab + ba = 2ab$.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Квадрат суммы равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого на второе плюс квадрат второго.

Типичная ошибка: $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$. Достаточно взять $a = b = 1$: $(1+1)^2 = 4$, а $1^2 + 1^2 = 2$. Потерялось как раз удвоенное произведение $2ab$.

Проверка на числах: $31^2 = (30+1)^2 = 900 + 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1 = 961$.

3. Квадрат разности

Способ 1 (раскрываем скобки).

$$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Способ 2 (пользуемся уже известной формулой). Разность — это сумма с противоположным числом: $a - b = a + (-b)$. Подставим в формулу квадрата суммы вместо b выражение $-b$:

$$(a-b)^2 = \big(a + (-b)\big)^2 = a^2 + 2a \cdot (-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Второй способ важен сам по себе: *новую формулу не обязательно выводить с нуля — её можно получить из старой подстановкой.* Этой идеей мы воспользуемся ещё не раз.

Замечание. Выражения $b - a$ и $a - b$ противоположны, а квадраты противоположных чисел равны. Поэтому $(b-a)^2 = (a-b)^2$. Это видно и по формуле:

$$(b-a)^2 = b^2 - 2ba + a^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

4. Куб суммы

Куб — это квадрат, умноженный ещё раз на то же выражение. Квадрат суммы мы уже знаем:

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b) = \\ &= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.\end{aligned}$$

Подобные слагаемые выделены одним цветом: $a^2b + 2a^2b = 3a^2b$, $2ab^2 + ab^2 = 3ab^2$.

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Полезно увидеть закономерность: показатель степени a убывает от 3 до 0, показатель b растёт от 0 до 3, а их сумма в каждом слагаемом равна 3. Коэффициенты: 1, 3, 3, 1.

Проверка на числах: $11^3 = (10+1)^3 = 1000 + 300 + 30 + 1 = 1331$.

5. Куб разности

Снова воспользуемся подстановкой: $a - b = a + (-b)$. Заменим в формуле куба суммы b на $-b$:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= \big(a + (-b)\big)^3 = a^3 + 3a^2 \cdot (-b) + 3a \cdot (-b)^2 + (-b)^3 = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

Чётная степень выражения $-b$ равна той же степени b, а нечётная отличается от неё знаком. Поэтому знаки чередуются.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Самопроверка: тот же результат получается и напрямую:

$$(a-b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) = a^3 - a^2b - 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Замечание. С кубом дело обстоит иначе, чем с квадратом: куб противоположного числа противоположен кубу самого числа. Поэтому $(b-a)^3 = -(a-b)^3$.

6. Разность кубов

Разность квадратов раскладывается на множители: $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$. Естественный вопрос: *а можно ли разложить на множители разность кубов* $a^3 - b^3$*?*

Из формулы куба разности

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$$

выразим $a^3 - b^3$ и вынесем общий множитель $3ab$:

$$a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3a^2b - 3ab^2 = (a-b)^3 + 3ab\,(a-b).$$

У обоих слагаемых есть общий множитель $(a-b)$. Вынесем его за скобки:

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)\big((a-b)^2 + 3ab\big) = (a-b)\big(a^2 - 2ab + b^2 + 3ab\big) = \\ &= (a-b)(a^2 + ab + b^2). \end{aligned}$$

Проверка раскрытием скобок:

$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - b^3 = a^3 - b^3.$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

Выражение a^2+ab+b^2 называют **неполным квадратом суммы**. Оно похоже на квадрат суммы

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

только вместо удвоенного произведения $2ab$ в нём стоит просто произведение ab.

7. Сумма кубов

Способ 1 (через куб суммы). Аналогично предыдущему пункту:

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3a^2b - 3ab^2 = (a+b)^3 - 3ab\,(a+b) = \\ &= (a+b)\big((a+b)^2 - 3ab\big) = (a+b)\big(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab\big) = \\ &= (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Способ 2 (подстановка). Сумму кубов можно записать как разность кубов:

$$a^3 + b^3 = a^3 - (-b)^3.$$

Подставим в формулу разности кубов $-b$ вместо b:

$$a^3 - (-b)^3 = \big(a - (-b)\big)\big(a^2 + a \cdot (-b) + (-b)^2\big) = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Проверка раскрытием скобок:

$$(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - \cancel{a^2 b} + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2 b} - \cancel{ab^2} + b^3 = a^3 + b^3.$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

Выражение $a^2 - ab + b^2$ называют **неполным квадратом разности**.

Итог: формулы сокращённого умножения

Название	**Формула**
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
Квадрат суммы	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Куб суммы	$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Как формулы связаны между собой:

- разность квадратов и квадрат суммы получены прямым раскрытием скобок;
- квадрат разности и куб разности получаются из формул для суммы заменой b на $-b$;
- куб суммы получается, если квадрат суммы ещё раз умножить на $(a + b)$;
- разность и сумма кубов получаются из формул куба разности и куба суммы вынесением общего множителя (или друг из друга заменой b на $-b$).

Каждую формулу можно читать в обе стороны: слева направо — *быстро раскрыть скобки*, справа налево — *разложить на множители*.

Геометрический вывод формул

Пусть числа a и b положительны, то есть являются длинами некоторых отрезков. Тогда у каждого слагаемого в формулах появляется наглядный смысл:

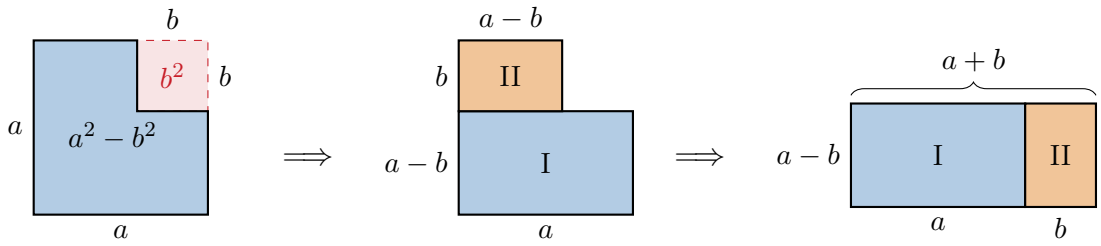
- a^2 равно площади квадрата со стороной a, а ab равно площади прямоугольника со сторонами a и b;
- a^3 равно объёму куба с ребром a, а a^2b равно объёму прямоугольного параллелепипеда с рёбрами a, a, b.

Будем разрезать фигуры на части и перекладывать их. Площадь (объём) фигуры равна сумме площадей (объёмов) её частей и не меняется при перекладывании. В формулах с разностью считаем, что $a > b$.

Важно. Геометрия делает формулы наглядными, но доказывает их только для положительных a и b. То, что формулы верны для *любых* чисел и выражений, следует из алгебраического вывода.

1. Разность квадратов

Вырежем из квадрата со стороной a квадрат со стороной b, примыкающий к углу. Площадь оставшейся фигуры равна $a^2 - b^2$. Разрежем её на два прямоугольника I и II и приставим прямоугольник II, повернув его, к прямоугольнику I.

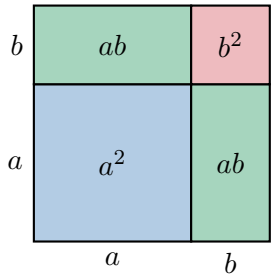


Получился прямоугольник со сторонами $a + b$ и $a - b$. Площадь при перекладывании не изменилась:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

2. Квадрат суммы

Разделим стороны квадрата со стороной $a + b$ на отрезки a и b и разрежем квадрат на четыре части: квадрат $a \times a$, квадрат $b \times b$ и два одинаковых прямоугольника $a \times b$.



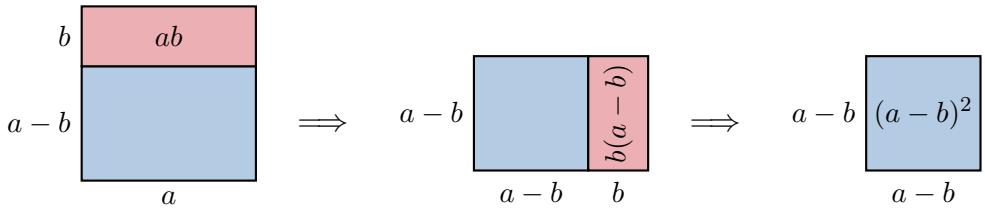
Площадь большого квадрата равна сумме площадей частей:

$$(a+b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Хорошо видно, почему $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$: кроме двух квадратов есть ещё два прямоугольника ab.

3. Квадрат разности

Возьмём квадрат со стороной a и будем отрезать от него полосы ширины b, пока не останется квадрат со стороной $a - b$.



Шаг 1. Отрежем верхнюю полосу $a \times b$. Останется прямоугольник $a \times (a-b)$ площади $a^2 - ab$.

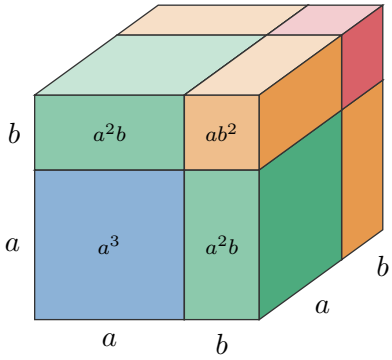
Шаг 2. Отрежем правую полосу $b \times (a-b)$, её площадь $b(a-b) = ab - b^2$. Останется квадрат со стороной $a - b$:

$$(a-b)^2 = a^2 - ab - (ab - b^2) = a^2 - 2ab + b^2.$$

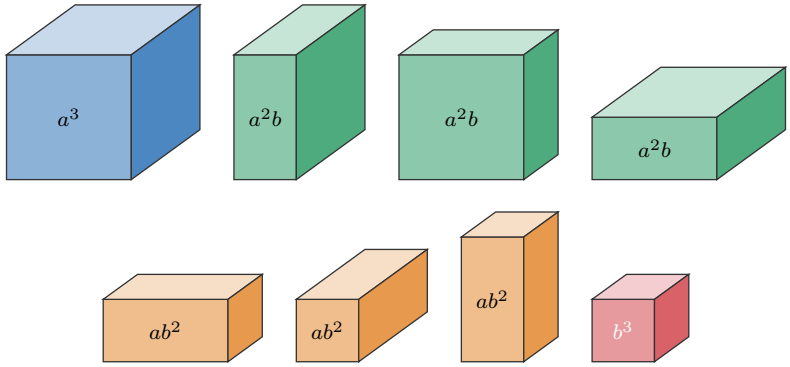
Обратите внимание: вторая полоса короче первой на b. Поэтому всего мы вычитаем не $2ab$, а $2ab - b^2$, и в ответе появляется слагаемое $+b^2$.

4. Куб суммы

Разделим каждое ребро куба с ребром $a + b$ на отрезки a и b и разрежем куб тремя плоскостями (по одной в каждом направлении). Получится 8 частей.



Разложим части по видам:

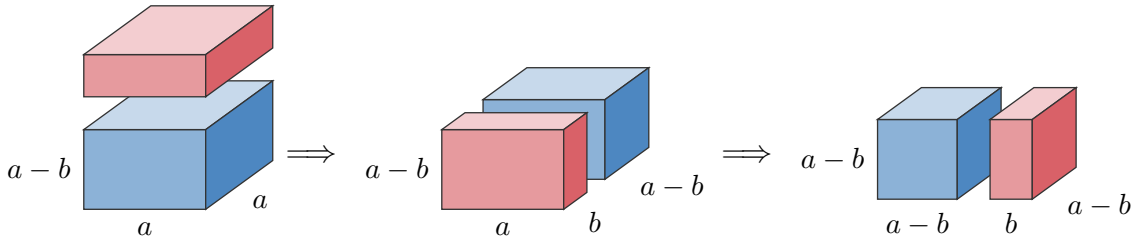


Это один куб с ребром a, три параллелепипеда с рёбрами a, a, b, три параллелепипеда с рёбрами a, b, b и один куб с ребром b. Объём куба равен сумме объёмов частей:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

5. Куб разности

Возьмём куб с ребром a и будем отрезать от него слои толщины b (сверху, спереди и справа), пока не останется куб с ребром $a-b$. Отрезаемый слой на каждом шаге выделен красным.



Шаг 1. Отрежем сверху слой $a \times a \times b$ объёма a^2b. Останется параллелепипед $a \times a \times (a-b)$ объёма $a^3 - a^2b$.

Шаг 2. Отрежем спереди слой $a \times b \times (a-b)$ объёма $ab(a-b) = a^2b - ab^2$. Останется параллелепипед $a \times (a-b) \times (a-b)$ объёма

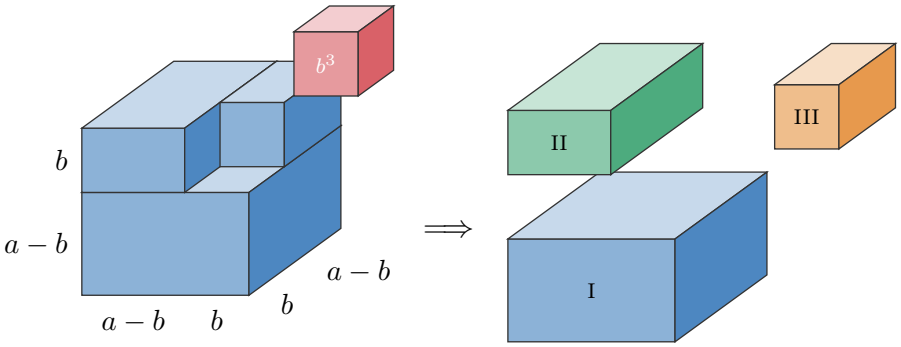
$$a^3 - a^2b - (a^2b - ab^2) = a^3 - 2a^2b + ab^2.$$

Шаг 3. Отрежем справа слой $b \times (a-b) \times (a-b)$. По формуле квадрата разности его объём $b(a-b)^2 = b(a^2 - 2ab + b^2) = a^2b - 2ab^2 + b^3$. Останется куб с ребром $a-b$:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= a^3 - 2a^2b + ab^2 - (a^2b - 2ab^2 + b^3) = \\ &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.\end{aligned}$$

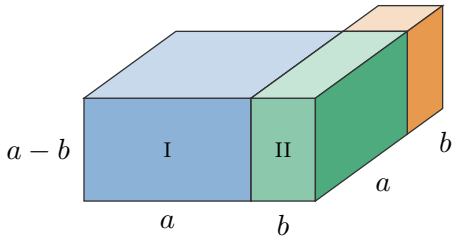
6. Разность кубов

Вырежем из куба с ребром a куб с ребром b, примыкающий к вершине. Объём оставшегося тела равен $a^3 - b^3$. Разрежем это тело на три параллелепипеда I, II, III.



Часть	Рёбра	Объём
I	$a,\ a,\ a-b$	$a^2(a-b)$
II	$a-b,\ a,\ b$	$ab(a-b)$
III	$b,\ a-b,\ b$	$b^2(a-b)$

У всех трёх частей одно из рёбер равно $a-b$. Поставим каждую часть так, чтобы это ребро стало высотой, и приставим части друг к другу:

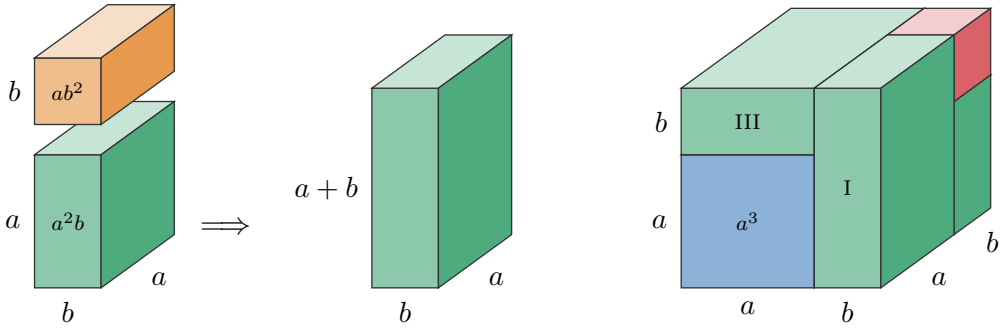


Получилось тело высоты $a-b$, основание которого составлено из квадрата $a \times a$, прямоугольника $a \times b$ и квадрата $b \times b$. Площадь основания $a^2 + ab + b^2$, поэтому объём равен $(a-b)(a^2 + ab + b^2)$. Объём при перекладывании не изменился:

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2).$$

7. Сумма кубов

Вернёмся к кубу с ребром $a+b$ из пункта 4. Каждый параллелепипед объёма a^2b можно склеить с соседним параллелепипедом объёма ab^2. Получится брусок с рёбрами a, b и $a+b$:



Значит, куб с ребром $a+b$ состоит из куба a^3, куба b^3 и трёх одинаковых брусков I, II, III объёма $ab(a+b)$ каждый (брусок II находится сзади и на рисунке не виден):

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} a^3 + b^3 &= (a+b)^3 - 3ab(a+b) = (a+b)\big((a+b)^2 - 3ab\big) = \\ &= (a+b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab) = (a+b)(a^2 - ab + b^2). \end{aligned}$$

Здесь геометрия подсказывает, как разрезать куб, а последний шаг (вынесение общего множителя $(a+b)$ за скобки) делается алгебраически.