профиматика

Математика | Русский язык | Физика | Информатика

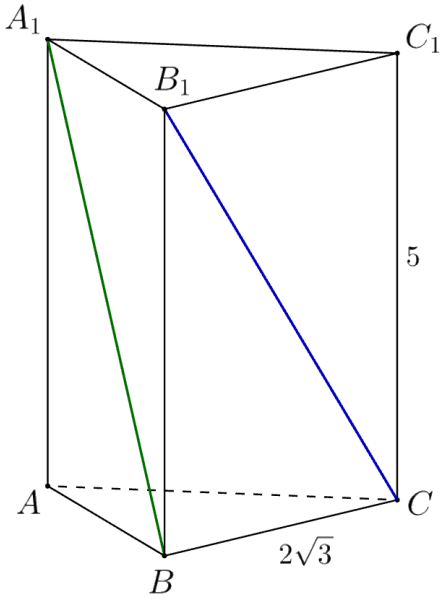
СТЕРЕОМЕТРИЯ: дополняем реальность



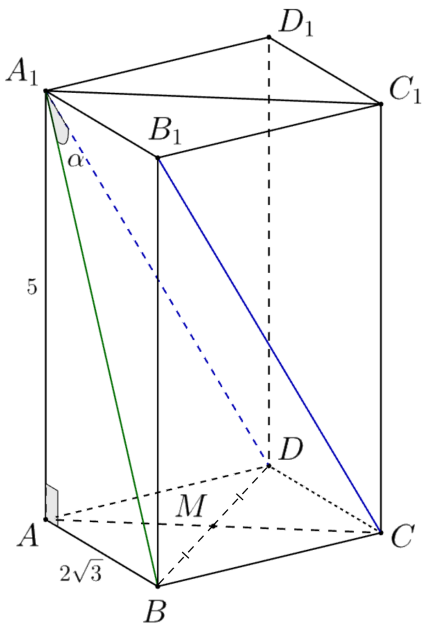
тут можете держать
с нами связь, получать
бесплатные материалы,
методички и разборы

Задача 1

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ сторона основания ABC равна $2\sqrt{3}$, а боковое ребро 5. Найдите угол между прямыми A_1B и B_1C.



Решение. Достроим заданную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ до параллелепипеда, присоединив равную ей призму $ACDA_1C_1D_1$.
Заметим, что $B_1C \parallel A_1D$, так как они являются диагоналями противоположных граней параллелепипеда. В таком случае $\angle(A_1B, B_1C) = \angle(A_1B, A_1D) = \alpha$.



Треугольник A_1AB является прямоугольным, поэтому мы можем найти A_1B с помощью теоремы Пифагора:

$$A_1B = \sqrt{AB^2 + AA_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 5^2} = \sqrt{12 + 25} = \sqrt{37} = B_1C = A_1D.$$

Пусть диагонали основания пересекаются в точке M. Тогда, так как в основании ромб, а треугольник ABC равносторонний, то BM – медиана и высота равностороннего

треугольника. Тогда

$$BM = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2\sqrt{3} = 3 \;\Rightarrow\; BD = 2BM = 6.$$

С помощью теоремы косинусов в треугольнике A_1BD найдём угол α:

$$BD^2 = A_1B^2 + A_1D^2 - 2 \cdot A_1B \cdot A_1D \cdot \cos\alpha;$$

$$6^2 = (\sqrt{37})^2 + (\sqrt{37})^2 - 2 \cdot \sqrt{37} \cdot \sqrt{37} \cdot \cos\alpha;$$

$$36 = 37 + 37 - 2 \cdot 37 \cdot \cos\alpha;$$

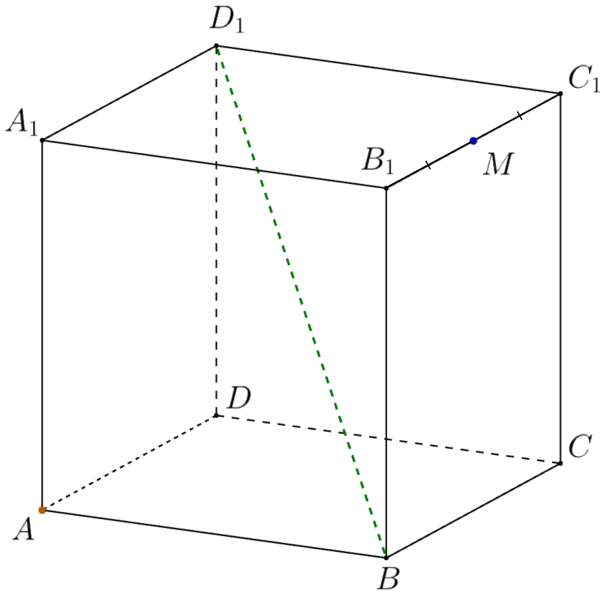
$$\cos\alpha = \frac{19}{37};$$

$$\alpha = \arccos\frac{19}{37}.$$

Ответ: $\arccos\frac{19}{37}$.

Задача 2

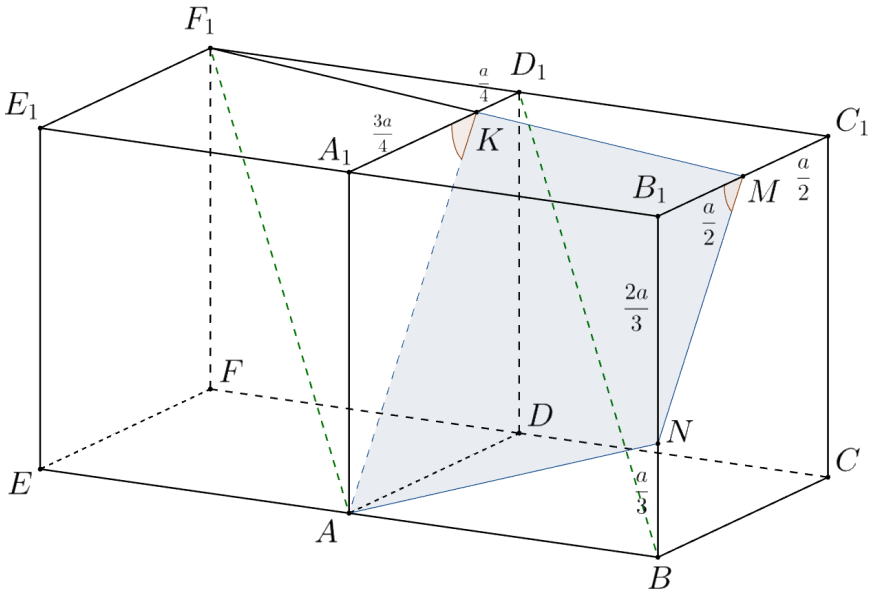
Точка M – середина ребра B_1C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечение, параллельное прямой BD_1 и проходящее через точки A и M, а также найдите в каком отношении оно делит пересекаемые рёбра.



Решение. Пристроим такой же куб $AEFDA_1E_1F_1D_1$. Прямые BD_1 и AF_1 параллельны, так как ABD_1F_1 – параллелограмм. Значит, AF_1 лежит в плоскости сечения. Пусть прямые F_1M и A_1D_1 пересекаются в точке K, следовательно, K лежит в плоскости сечения. Обозначим за N точку пересечения сечения с ребром BB_1. Сечение пересекает параллельные грани куба по параллельным прямым, поэтому $MN \,||\, AK$. Таким образом, $AKMN$ – искомое сечение.

Заметим, что KD_1 – средняя линия треугольника F_1MC_1. Обозначим за a длину ребра куба. Тогда $MC_1 = \frac{a}{2}$, то есть $KD_1 = \frac{a}{4}$. Таким образом,

$$\frac{A_1K}{KD_1} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{a}{4}} = 3 : 1.$$



$\angle AA_1K = \angle NB_1M = 90°$ и $\angle A_1KA = \angle B_1MN$, так как $A_1K \,||\, B_1M$ и $MN \,||\, AK$. Таким образом, треугольники AA_1K и NB_1M подобны. Получаем:

$$\frac{B_1N}{A_1A} = \frac{B_1M}{A_1K} \Rightarrow \frac{B_1N}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{3a}{4}} \Rightarrow B_1N = \frac{2a}{3}.$$

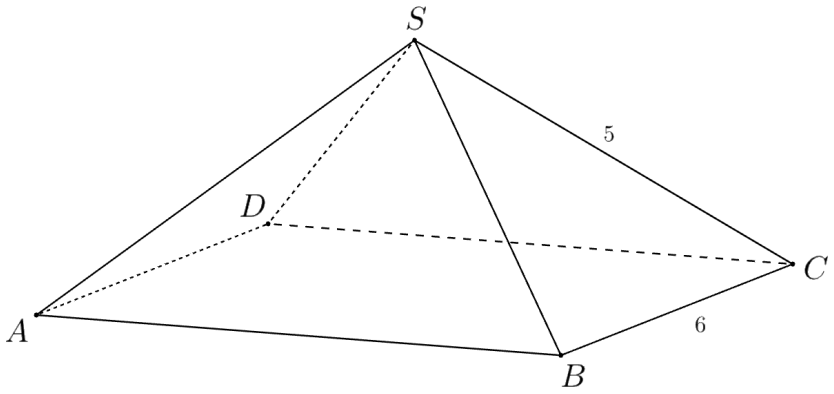
Значит,

$$\frac{BN}{NB_1} = \frac{\frac{a}{3}}{\frac{2a}{3}} = 1 : 2.$$

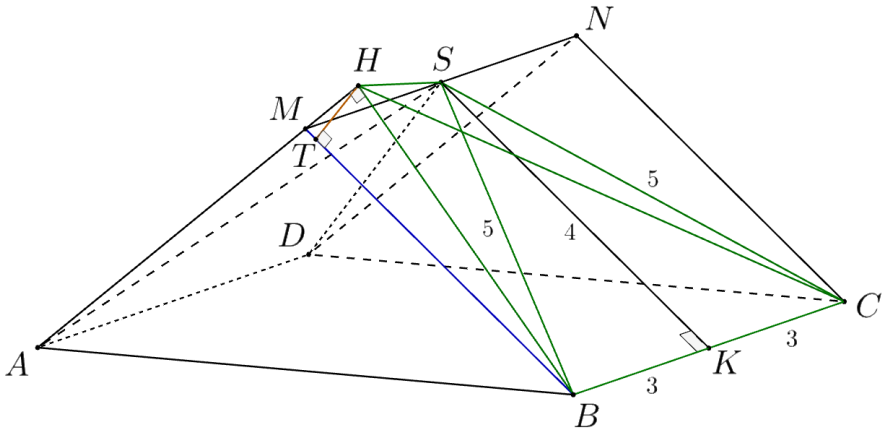
Ответ: $A_1K : KD_1 = 3 : 1$, $BN : NB_1 = 1 : 2$.

Задача 3

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ из вершины B опущен перпендикуляр BH на плоскость ASD. Найдите объём тетраэра $HBSC$, если сторона основания пирамиды равна 6, а боковое ребро 5.



Решение. Проведём прямую MN параллельно BC через точку S так, что $MS = SN$ и $MN = BC$. Заметим также, что $BM = CN$, то есть $MBCN$ – параллелограмм. Пусть K – середина BC, тогда SK – апофема. Так как $MS = SN$, $BK = KC$ и $SK \perp BC$, то $MBCN$ – прямоугольник, значит, призма $ABMDCN$ является прямой.

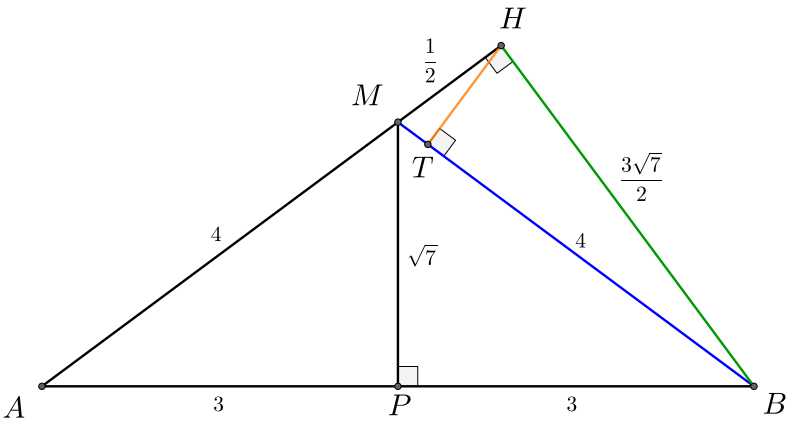


BH является высотой треугольника ABM. Пусть HT – перпендикуляр к MB. Так как $(AMB) \perp (MBC)$, значит, HT – высота пирамиды $HBSC$.
SK – апофема, треугольник BSK – прямоугольный, значит, по теореме Пифагора получаем:

$$SK = \sqrt{SB^2 - BK^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4 = BM = AM.$$

Пусть MP – медиана и высота треугольника MAB. По теореме Пифагора получаем:

$$MP = \sqrt{AM^2 - AP^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}.$$



Далее заметим, что

$$2S_{AMB} = AB \cdot MP = \sqrt{7} \cdot 6 = 4 \cdot BH \;\Rightarrow\; BH = \frac{3\sqrt{7}}{2}.$$

По теореме Пифагора в треугольнике MHB получаем:

$$MH = \sqrt{MB^2 - BH^2} = \sqrt{16 - \frac{63}{4}} = \frac{1}{2}.$$

HT – высота треугольника MHB, поэтому

$$HT = \frac{MH \cdot HB}{MB} = \frac{3\sqrt{7}}{16}.$$

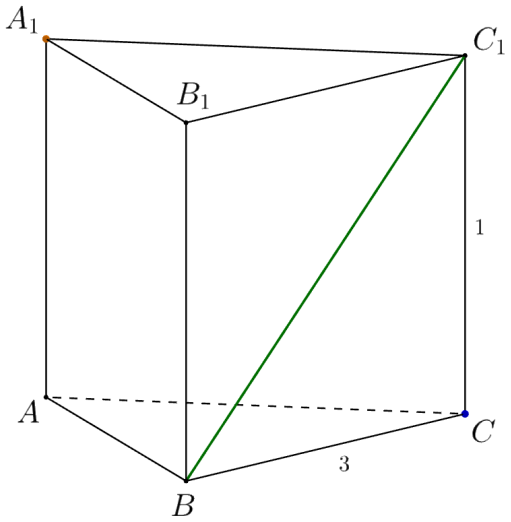
Таким образом, объём пирамиды $HBSC$ равен

$$V_{HBSC} = \frac{1}{3}HT \cdot S_{BSC} = \frac{1}{3}HT \cdot \frac{1}{2}BC \cdot SK = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{16} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{3\sqrt{7}}{4}.$$

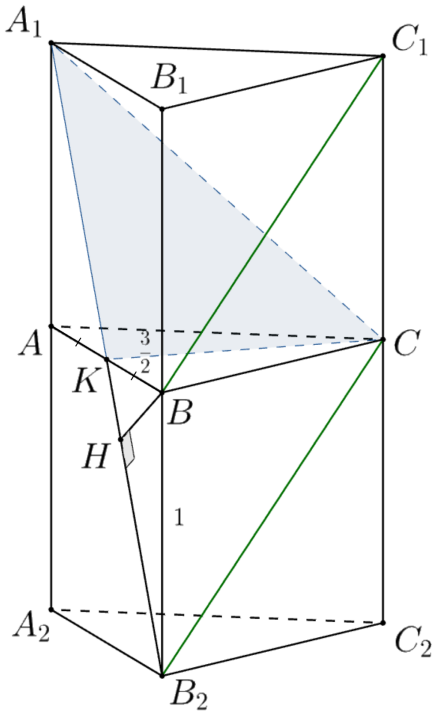
Ответ: $\frac{3\sqrt{7}}{4}$.

Задача 4

Через вершины A_1 и C правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ проведена плоскость ϕ параллельная прямой BC_1. Сторона основания призмы равна 3, а боковое ребро 1. Найдите расстояние от прямой BC_1 до плоскости ϕ.



Решение. Построим такую же призму $ABCA_2B_2C_2$ за плоскость (ABC). Заметим, что $BC_1 \,||\, B_2C$, значит, $B_2C \in \phi$. Пусть K – точка пересечения AB и A_1B_2. Тогда A_1KC – искомое сечение.



Треугольники AKA_1 и BKB_2 равны (они прямоугольные, $AA_1 = BB_2$ и $\angle A_1KA = \angle BKB_2$ как вертикальные), поэтому $AK = KB = \dfrac{3}{2}$. Треугольник ABC является правильным, следовательно, CK является высотой треугольника ABC. Отсюда следует, что $CK \perp (ABB_2)$.

Пусть BH – высота треугольника BB_2K. Так как $BH \perp B_2K$ и $BH \perp CK$, то $BH \perp \phi$. Прямая BC_1 параллельна плоскости ϕ, значит,

$$\rho(BC_1, \phi) = \rho(B, \phi) = BH.$$

Треугольник BB_2K прямоугольный, тогда по теореме Пифагора получаем:

$$B_2K = \sqrt{BK^2 + BB_2^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

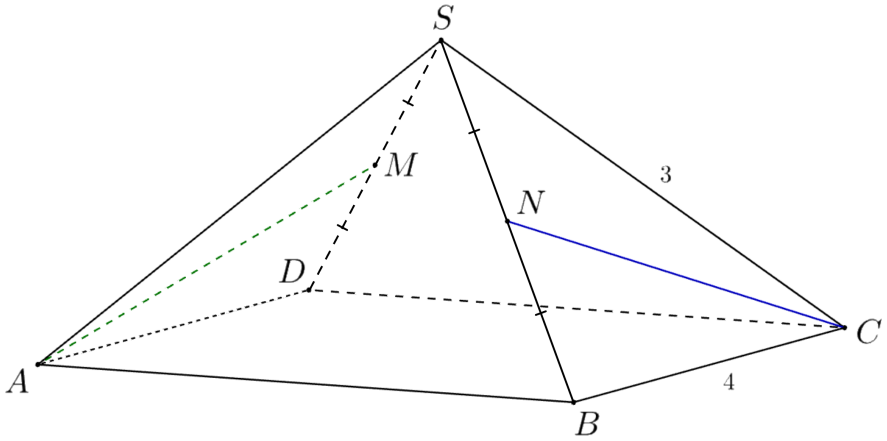
Найдём BH как высоту в прямоугольном треугольнике KBB_2:

$$BH = \frac{KB \cdot BB_2}{KB_2} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{13}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{13}}$.

Задача 5

В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ точки M и N – середины рёбер SD и SB соответственно. Найдите угол между прямыми AM и CN, если сторона основания пирамиды равна 4, а боковое ребро 3.



Решение. Достроим такую же пирамиду $TABCD$ снизу. Получается октаэдр. Пусть K – середина ребра BT. (CKA) и (AMC) образуют одинаковые углы с основанием $ABCD$, поэтому прямые AM и CK лежат в одной плоскости. CK и AM образуют равные углы с AC (в силу симметрии построения), значит, $AM \,||\, KC$ и $AM = KC$. То есть

$$\angle(AM, NC) = \angle(KC, NC) = \angle KCN.$$

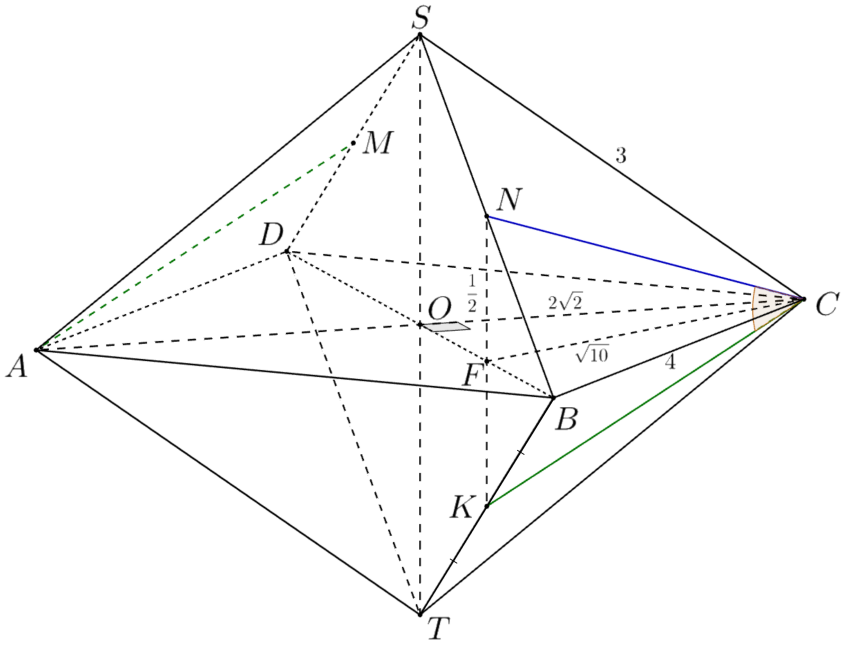
Треугольник TBS – равнобедренный, NK – средняя линия этого треугольника. Пусть KN

и BO пересекаются в точке F. F – середина отрезка BO. По теореме Пифагора получаем:

$$OB = \frac{DB}{2} = \frac{\sqrt{BC^2 + DC^2}}{2}.$$

Значит,

$$OB = \frac{\sqrt{4^2 + 4^2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \;\Rightarrow\; OF = \sqrt{2}.$$



Угол COF является прямым, значит, по теореме Пифагора получаем:

$$CF = \sqrt{OC^2 + OF^2} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8 + 2} = \sqrt{10}.$$

Треугольник SOC также является прямоугольным, тогда по теореме Пифагора получаем:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{3^2 - (2\sqrt{2})^2} = \sqrt{9 - 8} = 1 \;\Rightarrow\; NF = \frac{SO}{2} = \frac{1}{2}.$$

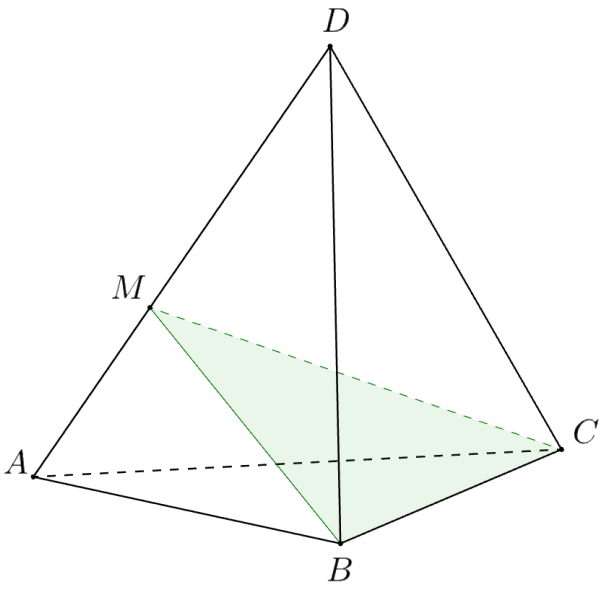
Треугольник NKC – равнобедренный, значит, CF – медиана, биссектриса и высота, значит,

$$\angle NCK = 2\angle NCF = 2\operatorname{arctg}\frac{NF}{FC} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{10}}.$$

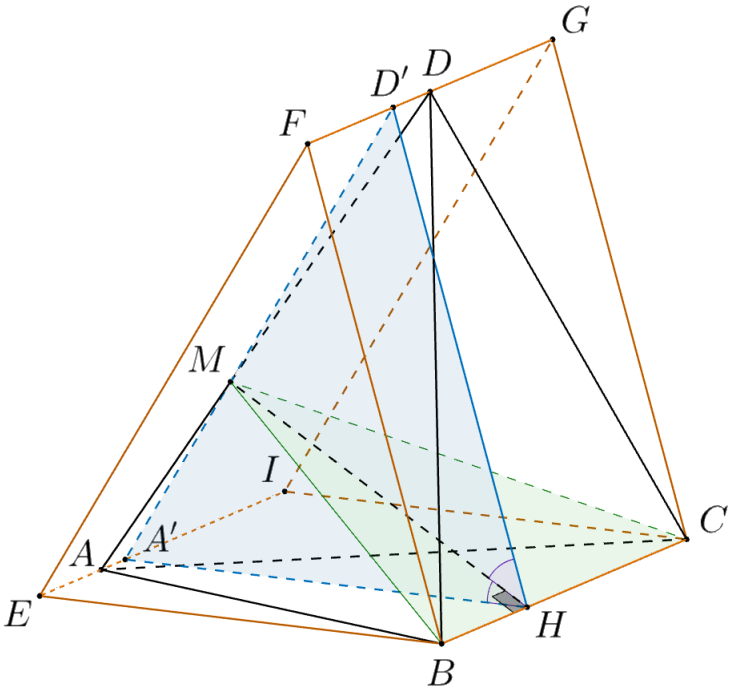
Ответ: $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2\sqrt{10}}$.

Задача 6

В тетраэдре $ABCD$ площади граней ABC и BCD равны 3 и 4 соответственно. Найдите в каком отношении делит ребро AD биссекторная плоскость двугранного угла при ребре BC.



Решение. Проведём высоту MH в треугольнике MBC. Через точку A проведём отрезок EI параллельно BC так, что $EI = BC$. Аналогично, через точку D проведём отрезок FG параллельно BC так, что $FG = BC$. На EI и FG отметим точки A' и D' так, что $HA' \perp EI$, $HD' \perp FG$ и $A'D'$ проходит через точку M.



Заметим, что $S_{ABC} = S_{A'BC}$, так как основания этих треугольников одинаковы, а также равны их высоты из A и A' (потому, что $AA' \,||\, BC$). Аналогично, $S_{BD'C} = S_{BDC}$. Получаем:

$$\frac{A'H}{D'H} = \frac{\frac{1}{2}A'H \cdot BC}{\frac{1}{2}D'H \cdot BC} = \frac{S_{A'BC}}{S_{D'BC}} = \frac{3}{4}.$$

$(A'HD') \perp BC$, следовательно, $\angle A'HD'$ делится биссекторной плоскостью пополам. То есть HM – биссектриса треугольника $A'HD'$, значит, по свойству биссектрисы треугольника получаем:

$$\frac{A'M}{D'M} = \frac{A'H}{D'H} = \frac{3}{4}.$$

Треугольники $AA'M$ и $DD'M$ подобны, так как $\angle AMA' = \angle DMD'$ (как вертикальные) и $\angle MAA' = \angle MDD'$ (как накрест лежащие). Поэтому

$$\frac{AM}{DM} = \frac{A'M}{D'M} = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.